Filter und Auswahlmengen

Kowalsky, Hans-Joachim

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 48, 1997,
S.37-47

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Filter und Auswahlmengen

Von **Hans-Joachim Kowalsky***, Braunschweig

(Eingegangen am 10. 10. 1997)

Einleitung

Es sei X eine unendliche Grundmenge, und η sei die Anfangszahl der durch die Kardinalzahl $|X|$ bestimmten Mächtigkeitsklasse.

Ein Filter $\mathfrak{u}$ von X wird als Mengensystem durch die Angabe gekennzeichnet, welche Teilmengen von X Elemente von $\mathfrak{u}$ sind. Und genau dann, wenn für alle Teilmengen M von X entweder $M \in \mathfrak{u}$ oder aber $X\setminus M \in \mathfrak{u}$ erfüllt ist, handelt es sich bei $\mathfrak{u}$ um einen Ultrafilter. Es gibt aber auch andere Möglichkeiten der Kennzeichnung von Filtern und speziell von Ultrafiltern. Ein Beispiel liefern die einfachen Filter, an deren Definition hier kurz erinnert werden soll.

0.1 Definition. Ein Filter $\mathfrak{v}$ von X heißt *einfach*, wenn für alle $V \in \mathfrak{v}$ erstens $|V| = |X|$ erfüllt ist und wenn zweitens für jede Zerlegung $Z = \{Z_\iota : \iota < \eta\}$ von X in paarweise disjunkte nicht leere Mengen eine der beiden folgenden Eigenschaften erfüllt ist:

(a) Es gibt ein $V \in \mathfrak{v}$ mit $|Z_\iota \cap V| = 1$ für alle $\iota < \eta$. Es wird dann V eine *Auswahlmenge* von Z genannt.

(b) Es gilt $\bigcup\limits_{\iota < \lambda} Z_\iota \in \mathfrak{v}$ mit einem $\lambda < \eta$.

Jeder einfache Filter ist automatisch ein Ultrafilter (vgl. Abh. d. BWG XLVII, Stufenfunktion für Ultrafilter, 5.2).

Die Eigenschaften (a) und (b) können auch zur Kennzeichnung weitgehend beliebiger Filter herangezogen werden, wenn man sie nur für Folgen gewisser Zerlegungen (Zerlegungssequenzen), nicht aber für alle Zerlegungen verlangt. Dies ist der Gegenstand der folgenden Untersuchungen. Nach kurzen Vorbemerkungen im ersten Abschnitt wird im zweiten Abschnitt auf Zerlegungen und Auswahlmengen eingegangen. Der dritte Abschnitt dient dann der induktiven Definition einer Abbildung Φ der Menge aller Zerlegungssequenzen in die Menge aller in einem bestimmten Sinn wesentlichen Filter der Grundmenge. Von ihr werden im vierten Abschnitt einige Eigenschaften, insbesondere ihre Surjektivität, bewiesen. Der fünfte Abschnitt betrifft schließlich das Verhalten von Φ gegenüber Sequenzerweiterungen.

1. Vorbemerkungen

Die nachfolgenden Untersuchungen beziehen sich auf eine feste unendliche Grundmenge. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann sie als Kardinalzahl gewählt werden. Kardinalzahlen werden als spezielle Ordinalzahlen aufgefaßt, nämlich als Anfangs-

* Prof. em. Dr. H.-J. Kowalsky · Am Schiefen Berg 20 · 38302 Wolfenbüttel

zahlen der Mächtigkeitsklassen von Ordinalzahlen. Die transfiniten Kardinalzahlen sollen mit ω_α (α Ordinalzahl) bezeichnet werden. Da die Grundmenge hier jedoch eine feste Kardinalzahl ist, kann auf den Index α verzichtet werden, so daß die Grundmenge weiterhin einfacher mit ω bezeichnet wird. Die Elemente von ω sind in der natürlichen Wohlordnung der Ordinalzahlen die vorangehenden Ordinalzahlen: Für Ordinalzahlen ι, κ ist ja allgemein $\iota < \kappa$ mit $\iota \in \kappa$ gleichwertig. Die auf ω folgende Kardinalzahl ω' ist bei Voraussetzung der Kontinuumshypothese die Mächtigkeit der Potenzmenge von ω; es ist also $\omega' = 2^\omega$.

Unter Filtern werden stets Filter von ω verstanden. Für sie wird die zur mengentheoretischen Inklusion inverse Ordnung benutzt: $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ ist gleichwertig mit $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$, der Vereinigungsfilter $\vee\, \mathfrak{a}_\iota$ besteht aus den Mengen der Form $\cup\, A_\iota$ mit $A_\iota \in \mathfrak{a}_\iota$, der Durchschnittsfilter $\wedge\, \mathfrak{a}_\iota$ hingegen aus nur endlichen Durchschnitten $A_{\iota_1} \cap \ldots \cap A_{\iota_n}$ mit $A_{\iota_1} \in \mathfrak{a}_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_n} \in \mathfrak{a}_{\iota_n}$. Zu den Filtern wird auch der Nullfilter $\mathfrak{o}$ mit der Basis $\{\emptyset\}$ gerechnet. Für eine beliebige Teilmenge A von ω bezeichnet $\widehat{A}$ den von A erzeugten Hauptfilter mit $\{A\}$ als Filterbasis. Mit $\mathfrak{f}$ wird der Fréchet-Filter von ω bezeichnet, der das Intervallsystem $\{[\iota, \omega)\colon \iota < \omega\}$ als Basis besitzt.

Für Filter $\mathfrak{a}$ heißt $k(\mathfrak{a}) = \min\{\,|A|\colon A \in \mathfrak{a}\}$ die Kardinalität von $\mathfrak{a}$. Es ist $k(\mathfrak{a}) \leq \omega$ und z.B. $k(\mathfrak{f}) = \omega$. Allgemein ist $k(\mathfrak{a}) = \omega$ gleichwertig mit $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{f} \neq \mathfrak{o}$. Es gilt dann auch $k(\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{f}) = \omega$, und $\mathfrak{a}$ ist Vereinigungsfilter von $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{f}$ und Filtern geringerer Kardinalität, die aber nachfolgend von untergeordneter Bedeutung sind. Vorwiegend wird es sich um Filter $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{f}$ handeln. Es sei daher $\mathbf{F} = \{\mathfrak{a}\colon \mathfrak{a} \leq \mathfrak{f}\}$.

2. Zerlegungen und Auswahlmengen

Unter einer Zerlegung Z wird stets eine Zerlegung von ω der Form $Z = \{Z_\iota\colon \iota < \omega\}$ in nicht leere und paarweise disjunkte Mengen mit $\cup\, \{Z_\iota : \iota < \omega\} = \omega$ verstanden.

2.1 Definition. Es sei $Z = \{Z_\iota\colon \iota < \omega\}$ eine Zerlegung. Dann heißt

$$\mathfrak{A}(Z) = \{A\colon A \subseteq \omega \textit{ und } |A \cap Z_\iota| = 1 \textit{ für alle } \iota < \omega\}$$

das System der *Auswahlmengen* von Z. Mit $\mu_\iota = \min Z_\iota$ für alle $\iota < \omega$ ist

$$\mu(Z) = \{\mu_\iota\colon \iota < \omega\}$$

eine spezielle Auswahlmenge.

Außer der Wohlordnung von ω sei jetzt noch eine beliebige Wohlordnung der Potenzmenge von ω fest gewählt. Sie induziert für jede Zerlegung Z dann in $\mathfrak{A}(Z)$ eine Wohlordnung, die jedoch in folgender Weise abgeändert werden soll: Die Auswahlmenge $\mu(Z)$ soll an den Anfang der abgeänderten Wohlordnung von $\mathfrak{A}(Z)$ gesetzt werden. Für Teilmengen $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A}(Z)$ bedeutet dann $\min \mathfrak{M}$ immer das Minimum hinsichtlich dieser Wohlordnung. Speziell gilt $\min \mathfrak{A}(Z) = \mu(Z)$.

2.2 Definition. Für jede Zerlegung Z und für jeden Filter $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ von ω sei

$$\mathfrak{A}(Z, \mathfrak{b}) = \{A\colon A \in \mathfrak{A}(Z) \textit{ und } \widehat{A} \wedge \mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}\}$$

und im Fall $\mathfrak{A}(Z, \mathfrak{b}) \neq \emptyset$ weiter

$$\mu(Z, \mathfrak{b}) = \min \mathfrak{A}(Z, \mathfrak{b}).$$

Wenn $\mathfrak{A}(Z, \mathfrak{b}) \neq \emptyset$ erfüllt ist, gilt offenbar $|\mu(Z, \mathfrak{b})| = \omega$. Im Fall des Fréchet-Filters $\mathfrak{f}$ gilt sogar $\mathfrak{A}(Z, \mathfrak{f}) = \mathfrak{A}(Z)$ und daher $\mathfrak{A}(Z, \mathfrak{f}) \neq \emptyset$ für jede Zerlegung Z.

2.3 Satz. *Es sei* $\mathfrak{o} < \mathfrak{b} \leq \mathfrak{f}$. *Für alle Zerlegungen* Z *und für jede Auswahlmenge* $A \in \mathfrak{A}(Z)$ *ist dann* $\widehat{A} \wedge \mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ *gleichwertig mit*

$$k(\widehat{A} \wedge \mathfrak{b}) = k(\mathfrak{b}) = \omega.$$

B e w e i s: Wegen $\mathfrak{o} < \mathfrak{b} \leq \mathfrak{f}$, also $\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{f} \neq \mathfrak{o}$, gilt nach den Vorbemerkungen im ersten Abschnitt jedenfalls $k(\mathfrak{b}) = \omega$. Aus $k(\widehat{A} \wedge \mathfrak{b}) = \omega$ folgt trivialerweise $\widehat{A} \wedge \mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$. Umgekehrt sei $k(\widehat{A} \wedge \mathfrak{b}) < \omega$ vorausgesetzt. Es gibt dann eine Menge $B \in \mathfrak{b}$ mit $|A \cap B| < \omega$, und weiter existiert daher ein $\iota < \omega$ mit $A \cap B \subseteq [0, \iota)$. Wegen $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{f}$ gibt es aber ein $B' \in \mathfrak{b}$ mit $B' \subseteq [\iota, \omega)$. Es folgt $A \cap B \cap B' = \emptyset$, wegen $B \cap B' \in \mathfrak{b}$ also $\widehat{A} \wedge \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$. •

2.4 Satz. *Es sei* $\mathfrak{o} < \mathfrak{b} \leq \mathfrak{f}$, *und* $\mathfrak{b}$ *besitze eine Filterbasis* $\{B_\kappa : \kappa < \omega\}$ *der Mächtigkeit* ω. *Für jede Zerlegung* $Z = \{Z_\iota : \iota < \omega\}$ *tritt dann genau einer der folgenden beiden Fälle ein:*

(a) $\mathfrak{A}(Z, \mathfrak{b}) \neq \emptyset$.

(b) *Es gilt* $\bigcup\limits_{\iota < \lambda}$ *mit einem* $\lambda < \omega$.

B e w e i s: Erstens sei (b) nicht erfüllt. Dann gibt es eine streng isotone Abbildung $f\colon \omega \to \omega$ mit $f(\kappa) \geq \kappa$ und mit $B_\kappa \cap Z_{f(\kappa)} \neq \emptyset$ für alle $\kappa < \omega$. Wählt man nun für jedes $\iota < \omega$ ein $\rho_\iota \in Z_\iota$ fest aus, im Fall $\iota = f(\kappa)$ aber so, daß $\rho_\iota \in B_\kappa \cap Z_\iota$ erfüllt ist, so gilt $A = \{\rho_\iota : \iota < \omega\} \in \mathfrak{A}(Z, \mathfrak{b})$; d. h. (a) ist erfüllt.

Zweitens sei (b) erfüllt, und es sei $A \in \mathfrak{A}(Z, \mathfrak{b})$. Wegen (b) gibt es ein $\lambda < \omega$ mit $B = \bigcup\limits_{\iota < \lambda} Z_\iota \in \mathfrak{b}$. Für jedes $\iota < \lambda$ gilt $A \cap Z_\iota = \{\rho_\iota\}$ wegen $A \in \mathfrak{A}(Z, \mathfrak{b})$, also $A \in \mathfrak{A}(Z)$. Es folgt $\{\rho_\iota : \iota < \lambda\} = A \cap B \in \widehat{A} \wedge \mathfrak{b}$ und daher $k(\widehat{A} \wedge \mathfrak{b}) < \omega = k(\mathfrak{b})$ wegen $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{f}$. Nach Satz 2.3 ist dies ein Widerspruch zu $A \in \mathfrak{A}(Z, \mathfrak{b})$, nämlich zu $\widehat{A} \wedge \mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$. Damit muß $\mathfrak{A}(Z, \mathfrak{b}) = \emptyset$ erfüllt sein; d. h. (a) gilt nicht. •

Es soll jetzt noch kurz auf eine besondere Art von Zerlegungen eingegangen werden.

2.5 Definition. Es sei M eine Teilmenge von ω und $M \setminus \{0\} = \{\gamma_\iota : 0 < \iota < \omega\}$ mit $\gamma_\iota < \gamma_\kappa$ für $\iota < \kappa$. Dann soll $Z(M) = \{Z_\iota : \iota < \omega\}$ mit $Z_\iota = [\gamma_\iota, \gamma_{\iota+1})$ für $0 < \iota < \omega$ und mit $Z_0 = \omega \setminus \cup \{Z_\iota : 0 < \iota < \omega\}$ die *von* M *induzierte Zerlegung* oder allgemein eine *mengeninduzierte Zerlegung* genannt werden.

Abgesehen von Z_0 besteht Z(M) also aus Intervallen von ω.

2.6 Satz. *Es sei* $M \subseteq \omega$, $|M| = \omega$, $\mathfrak{b} \in \mathbf{F}$ *und* $\overset{\frown}{M} \wedge \mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$. *Dann gilt*

$$\mathfrak{A}(Z(M), \mathfrak{b}) \neq \emptyset \text{ und } \mu(Z(M), \mathfrak{b}) = M \cup \{0\}.$$

B e w e i s: Wegen $|M| = \omega$ gilt $M \setminus \{0\} = \{\gamma_\iota : 0 < \iota < \omega\}$ mit $\gamma_\iota < \gamma_\kappa$ für $\iota < \kappa$. Mit $Z(M) = \{Z_\iota : \iota < \omega\}$ folgt $\min Z_0 = 0$ und $\min Z_\iota = \gamma_\iota$ für $0 < \iota < \omega$. Daher ist $A = \{0\} \cup \{\gamma_\iota : 0 < \iota < \omega\} = M \cup \{0\}$ eine Auswahlmenge aus $\mathfrak{A}(Z(M))$, für die $\widehat{A} \wedge \mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ und daher $A \in \mathfrak{A}(Z(M), \mathfrak{b})$ erfüllt ist. Es folgt $\mathfrak{A}(Z(M), \mathfrak{b}) \neq \emptyset$ und außerdem unmittelbar $A = \min \mathfrak{A}(Z(M), \mathfrak{b})$, also auch $\mu(Z(M), \mathfrak{b}) = A = M \cup \{0\}$. •

2.7 Definition. Eine Folge $S = (Z^\nu)_{\nu < \tau}$ paarweise verschiedener Zerlegungen mit einer Limeszahl $\tau = \tau\,(S) \leq \omega'$ wird eine *Zerlegungssequenz* genannt. Die einzelnen Zerlegungen Z^ν der Sequenz sollen stets die Form $Z^\nu = \{Z^\nu_\iota : \iota < \omega\}$ besitzen.

Die Menge aller Zerlegungssequenzen wird mit Σ bezeichnet. Weiter sei Σ_m die Menge aller Zerlegungssequenzen $S = (Z^\nu)_{\nu < \tau}$, bei denen alle Z^ν mengeninduziert sind. Solche Sequenzen sollen dann selbst *mengeninduziert* genannt werden.

3. Die Abbildung $\Phi: \Sigma \to \mathbf{F}$

Die Definition der Abbildung Φ erfolgt durch Konstruktion des Bildfilters $\Phi(S)$ für jede gegebene Zerlegungssequenz $S \in \Sigma$. Gilt nun $S = (Z^\nu)_{\nu < \tau}$ mit einer Limeszahl $\tau \leq \omega'$, so werden zunächst induktiv jedem Index $\nu < \tau$ eine Teilmenge $A(S, \nu)$ und ein Filter $\mathfrak{a}\,(S, \nu)$ von ω mit folgenden Eigenschaften zugeordnet:

(i) $|A(S, \nu)| = \omega$.

(ii) $\mathfrak{a}(S, \nu) \leq \mathfrak{f}$.

(iii) $\mathfrak{a}(S, \nu)$ *besitzt eine Filterbasis der Mächtigkeit* ω.

(iv) *Aus* $\nu_1 < \nu_2 < \tau$ *folgt* $\mathfrak{a}(S, \nu_1 \geq \mathfrak{a}(S, \nu_2)$.

Danach wird dann der Bildfilter von S durch

$$\Phi(S) = \bigwedge_{\nu < \tau} \mathfrak{a}(S, \nu)$$

definiert, für den wegen (ii) ebenfalls $\Phi(S) \leq \mathfrak{f}$, also $\Phi(S) \in \mathbf{F}$ gilt, der aber im allgemeinen nicht mehr eine Filterbasis lediglich der Mächtigkeit ω besitzt. Die skizzierte Definition von Φ soll jetzt entsprechend durchgeführt werden. Dazu sei $S = (Z^\nu)_{\nu < \tau} \in \Sigma$ fest gegeben.

Wegen $\mathfrak{A}(Z^0, \mathfrak{f}) = \emptyset$ ist nach 2.2 der folgende Induktionsbeginn zulässig:

$$A(S, 0) = \mu(Z^0, \mathfrak{f}), \quad \mathfrak{a}(S, 0) = \widehat{A(S, 0)} \wedge \mathfrak{f}.$$

Unmittelbar folgen (i) und (ii). Mit $\mathfrak{f}$ hat auch $\mathfrak{a}(S, 0)$ eine Filterbasis der Mächtigkeit ω, so daß (iii) ebenfalls erfüllt ist.

Weiter sei $0 < \sigma < \tau$, und für alle $\nu < \sigma$ seien die Mengen $A(S, \nu)$ und die Filter $\mathfrak{a}(S, \nu)$ bereits den Bedingungen (i)–(iv) entsprechend konstruiert. Dann sei

$$\mathfrak{b}_\sigma = \bigwedge_{\nu < \sigma} \mathfrak{a}(S, \nu),$$

wobei im Fall $\sigma = \nu^* + 1$ wegen (iv) einfach $\mathfrak{b}_\sigma = \mathfrak{a}(S, \nu^*)$ gilt. Es folgt $\mathfrak{b}_\sigma \leq \mathfrak{a}(S, \nu) \leq \mathfrak{f}$ für alle $\nu < \sigma$, und wegen $\sigma < \tau \leq \omega'$, also $|\sigma| \leq \omega$, besitzt wegen (iii) und (iv) auch $\mathfrak{b}_\sigma$ eine Basis der Mächtigkeit ω. Nach Satz 2.4 tritt nun genau einer der beiden folgenden Fälle ein.

Fall (a): $\mathfrak{A}(Z^\sigma, \mathfrak{b}_\sigma) \neq \emptyset$.

Dann seien

$$A(S, \sigma) = \mu(Z^\sigma, \mathfrak{b}_\sigma) \text{ und } \mathfrak{a}(S, \sigma) = \widehat{A(S, \sigma)} \wedge \mathfrak{b}_\sigma.$$

Wieder folgen (i)–(iii) unmittelbar. Und wegen $\mathfrak{a}(S, \sigma) \leq \mathfrak{b}_\sigma \leq \mathfrak{a}(S, \nu)$ für alle $\nu < \sigma$ gilt auch (iv).

Fall (b): $\bigcup_{\iota < \lambda} Z_\iota^\sigma \in \mathfrak{b}_\sigma$ *mit einem* $\lambda < \omega$.

Dann seien

$$A(S, \sigma) = \omega \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}(S, \sigma) = \widehat{A(S, \sigma)} \wedge \mathfrak{b}_\sigma = \mathfrak{b}_\sigma .$$

Die Gültigkeit von (i)–(iv) ergibt sich hier sofort.

Damit ist die induktive Definition abgeschlossen, und, wie oben erwähnt, wird jetzt $\Phi(S)$ durch

$$\Phi(S) = \bigwedge_{\nu < \tau} \mathfrak{a}(S, \nu)$$

definiert.

Die so erklärte Abbildung $\Phi\colon \Sigma \to \mathbf{F}$ ist nicht injektiv. Es wird sich zeigen, daß eine Zerlegungssequenz S unter Umständen aufgefüllt oder ausgedünnt werden kann, ohne daß dabei der Bildfilter $\Phi(S)$ geändert wird. Es wird sich aber auch ergeben, daß bereits eine Umordnung der Zerlegungssequenz zu einer Änderung des Bildfilters führen kann. Schließlich wird ein wichtiges Resultat sein, daß die Abbildung Φ surjektiv ist.

3.1 Definition. $S \ll S' \Leftrightarrow \Phi(S) \leq \Phi(S')$,
$S \approx S' \Leftrightarrow \Phi(S) = \Phi(S')$.

Offenbar ist $\ll$ eine Halbordnung von Σ mit $\approx$ als zugehöriger Äquivalenzrelation.

3.2 Satz. $S \ll S'$ *ist gleichwertig damit, daß es zu jedem* $\nu' < \tau\,(S')$ *ein* $\nu < \tau\,(S)$ *mit* $\mathfrak{a}(S, \nu) \leq \mathfrak{a}(S', \nu')$ *gibt.*

Beweis: $S \ll S'$ ist nach Definition 3.1 gleichwertig mit

$$\bigwedge_{\nu < \tau(S)} \mathfrak{a}(S, \nu) = \Phi(S) \leq \Phi(S') = \bigwedge_{\nu' < \tau(S')} \mathfrak{a}(S', \nu'),$$

woraus sich die Behauptung unmittelbar ergibt. •

4. Eigenschaften von Φ

Im Zusammenhang mit einfachen Ultrafiltern (vgl. 0.1) soll zunächst der Sonderfall maximaler Zerlegungen $S \in \Sigma$ untersucht werden, die alle Zerlegungen von ω enthalten. Derartige Sequenzen S sind also Wohlordnungen der Menge aller Zerlegungen, so daß für sie jedenfalls $\tau(S) = \omega'$ gelten muß.

4.1 Satz. $S = (Z^\nu)_{\nu < \omega'}$ *sei eine maximale Zerlegungssequenz. Dann ist* $\mathfrak{u} = \Phi(S)$ *ein einfacher Ultrafilter.*

Beweis: Wegen $\mathfrak{u} = \Phi(S) \leq \mathfrak{f}$ gilt $k(\mathfrak{u}) = \omega$. Zu gegebenem $Z \in \Sigma$ existiert wegen der Maximalität von S ein $\nu < \omega'$ mit $Z = Z^\nu$. Tritt bei der Konstruktion von $\Phi(S)$ im ν-ten Schritt der Fall (a) ein, gilt $A(S, \nu) \in \mathfrak{a}(S, \nu)$, also erst recht $A(S, \nu) \in \mathfrak{u}$, und $|A(S, \nu \cap Z_\iota^\nu| = 1$ für alle $\iota < \omega$. Tritt aber Fall (b) ein, gilt $\bigcup_{\iota < \lambda} Z_\iota^\nu \in \mathfrak{u}$ mit einem $\lambda < \omega$. Daher ist $\mathfrak{u}$ ein einfacher Filter und somit auch ein Ultrafilter. •

Die Frage, ob umgekehrt auch jeder einfache Ultrafilter Φ-Bild einer Zerlegungssequenz ist, wird im nächsten Satz in allgemeinerer Form positiv beantwortet, nämlich durch den Nachweis der Surjektivität von Φ. Damit ist allerdings nicht gezeigt, daß jeder einfache Ultrafilter auch Φ-Bild einer maximalen Zerlegungssequenz ist. Dies wird sich erst im nächsten Abschnitt ergeben.

4.2 Satz. $\Phi\colon \Sigma \to \mathbf{F}$ *ist surjektiv.*

Beweis: Es sei $\mathfrak{v} \in \mathbf{F}$ gegeben, und $\{V_\nu : \nu < \tau\}$ mit einer Limeszahl $\tau \leq \omega'$ sei eine Filterbasis von $\mathfrak{v}$. Ihr wird mit Hilfe von Definition 2.5 durch $Z^\nu = Z(V_\nu)$ eine mengeninduzierte Zerlegungssequenz $S = (Z^\nu)_{\nu < \tau} \in \Sigma_m$ zugeordnet. Wegen Satz 2.6 ergibt sich jetzt, daß bei der induktiven Berechnung von $\Phi(S)$ in jedem Schritt der Fall (a) eintritt und

$$A(S,\sigma) = V_\sigma \cup \{0\}, \quad \mathfrak{a}(S,\sigma) = \widehat{A(S,\sigma)} \wedge \bigwedge_{\nu < \sigma} \mathfrak{a}(S,\nu) = \bigwedge_{\nu \leq \sigma} \widehat{A(S,\nu)} \wedge \mathfrak{f}$$

für alle $\sigma < \tau$ gilt. Wegen $\mathfrak{v} \leq \mathfrak{f}$ folgt hieraus schließlich

$$\Phi(S) = \mathfrak{f} \wedge \bigwedge_{\sigma < \tau} \widehat{V_\sigma \cup \{0\}} = \mathfrak{f} \wedge \bigwedge_{\sigma < \tau} \overset{\cap}{V}_\sigma = \mathfrak{f} \wedge \mathfrak{v} = \mathfrak{v}. \qquad \bullet$$

4.3 Satz. *Zu jeder Zerlegungssequenz* $S' \in \Sigma$ *gibt es eine mengeninduzierte Zerlegungssequenz* $S \in \Sigma_m$ *mit* $S \approx S'$, *also mit* $\Phi(S) = \Phi(S')$.

Beweis: Es sei $\mathfrak{v} = \Phi(S')$. Im Beweis von Satz 4.2 wurde eine Sequenz $S \in \Sigma_m$ mit $\mathfrak{v} = \Phi(S)$ konstruiert, also mit $\Phi(S) = \Phi(S')$. •

Im Vorgriff soll schon hier auf einige Besonderheiten hingewiesen werden: Wenn $S, S' \in \Sigma$ lediglich durch eine Umordnung aus einander hervorgehen, kann dennoch $\Phi(S) \neq \Phi(S')$ gelten. Ein Beispiel bilden die maximalen Sequenzen, deren Φ-Bilder nach Satz 4.1 sämtlich einfache Ultrafilter sind; und, wie vorher bemerkt, auch alle einfachen Ultrafilter als Φ-Bilder maximaler Sequenzen gewonnen werden können.

Eine Ausnahme bilden die mengeninduzierten Sequenzen aus dem Beweis von Satz 4.2.

4.4 Satz. *Es sei* $\{V_\nu : \nu < \tau\}$ *eine Basis des Filters* $\mathfrak{v}$, *und* $S = (Z^\nu)_{\nu < \tau}$ *mit* $Z^\nu = Z(V_\nu)$ *sei die von dieser Basis induzierte Zerlegungssequenz. Für jede aus* S *durch Umordnung hervorgehende Sequenz* S' *gilt dann* $\Phi(S') = \Phi(S) = \mathfrak{v}$.

Beweis: Der Umordnung von S entspricht eine Umordnung der Filterbasis von $\mathfrak{v}$. Dabei entsteht jedoch wieder eine Filterbasis von $\mathfrak{v}$. •

Keineswegs aber lassen mengeninduzierte Sequenzen $S = (Z^\nu)$ mit $Z^\nu = Z(M_\nu)$ allgemein Umordnungen unter Beibehaltung des Bildfilters $\mathfrak{v} = \Phi(S)$ zu: Es muß $\{M_\nu : \nu < \tau\}$ nämlich keine Basis von $\mathfrak{v}$ sein, und es muß auch nicht $M_\nu \in \mathfrak{v}$ erfüllt sein. Die vorher bewiesene Möglichkeit beliebiger Umordnungen war eben an recht einschränkende Voraussetzungen geknüpft.

5. Sequenzerweiterungen

Eine Zerlegungssequenz $S = (Z^\nu)_{\nu<\tau}$ mit $\Phi(S) = \mathfrak{v}$ kann man in vielfältiger Weise zu einer Teilsequenz S' ausdünnen, für die immer noch $\Phi(S') = \mathfrak{v}$ gilt. Zum Beispiel kann man solche Zerlegungen Z^ν fortlassen, für die bei der induktiven Berechnung von $\Phi(S)$ der Fall (b) eintritt, weil dieser keinerlei Änderung bewirkt. Aber auch auf andere Weise ist eine Ausdünnung möglich: Wenn etwa $\{V_\nu : \nu < \tau\}$ eine Filterbasis von $\mathfrak{v}$ und S die mengeninduzierte Sequenz mit $Z^\nu = Z(V_\nu)$ für alle $\nu < \tau$ ist, kann man aus der Filterbasis noch Mengen streichen, ohne die Eigenschaft einer Filterbasis von $\mathfrak{v}$ zu verlieren. Für die aus S durch entsprechende Streichung hervorgehende Sequenz S' gilt dann wieder $\Phi(S') = \mathfrak{v}$. Man darf die Filterbasis allerdings nicht zu stark reduzieren, weil sie sonst unter Umständen nur einen echt gröberen Filter als $\mathfrak{v}$ erzeugt.

Statt auf die Ausdünnung soll hier jedoch das Hauptgewicht auf den umgekehrten Prozeß der Sequenzerweiterung gelegt werden.

5.1 Definition. Es seien S, S^* Zerlegungssequenzen. Dann soll S^* eine *zulässige Erweiterung* von S heißen, wenn S eine Teilsequenz von S^* und $S^* << S$ (gleichwertig: $\Phi(S) \geq \Phi(S^*)$, vgl. 3.1) ist.
Im allgemeinen kann S eine Teilsequenz von S^* sein, ohne daß S^* eine zulässige Erweiterung von S^* ist.

5.2 Satz. *Für die Filter* $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ *von* ω *gelte* $\mathfrak{v} < \mathfrak{u} \leq \mathfrak{f}$ *und* $\mathfrak{u} = \Phi(S)$ *mit einer Zerlegungssequenz* S. *Dann gibt es eine zulässige Erweiterung* S^* *von* S *mit* $\Phi(S^*) = \mathfrak{v}$. *Dabei kann* S^* *aus* S *sogar durch Erweiterung mit mengeninduzierten Zerlegungen gewonnen werden.*

Beweis: Es sei $S = (Z^\nu)_{\nu<\tau}$. Ferner sei wie im Beweis von 4.2 zunächst $\{V_\rho : \rho < \overline{\tau}\}$ eine Filterbasis von $\mathfrak{v}$ und dann $\overline{S} = (\overline{Z}^\rho)_{\rho<\overline{\tau}}$ die Sequenz der mengeninduzierten Zerlegungen $\overline{Z}^\rho = Z(V_\rho)$, für die $\Phi(\overline{S}) = \mathfrak{v}$ gilt. Wegen Satz 4.4 ist $\Phi(\overline{S}) = \mathfrak{v}$ unabhängig von der Reihenfolge der Zerlegungen $\overline{Z}^\rho$, was anschließend ausgenutzt wird. Zunächst werden die Sequenzen S und $\overline{S}$ in einer neuen Sequenz S^* zusammengefaßt, indem man mit Z^0 beginnend die Zerlegungen beider Sequenzen etwa abwechselnd aufführt, bis gegebenenfalls eine Sequenz erschöpft ist und der Rest von S^* aus Zerlegungen der anderen Sequenz besteht. Nachträglich soll dann noch folgende Umordnung vorgenommen werden: Wenn eine Zerlegung gleichzeitig in S und $\overline{S}$ auftritt, wenn also $Z^\nu = \overline{Z}^\rho$ gilt, dann soll $\overline{Z}^\rho$ an die Stelle von Z^ν gesetzt werden. Die so erhaltene Sequenz soll mit $S^* = (Z^{*\lambda})_{\lambda<\tau^*}$ bezeichnet werden. Sie enthält S als Teilsequenz und nach Umordnung ebenfalls $\overline{S}$.

Bei der jetzt folgenden Berechnung von Φ (S^*) werden die bei der Definition von Φ benutzten Bezeichnungen entsprechend verwendet. Zunächst gilt

$$A(S^*, 0) = \mu(Z^{*0}, \mathfrak{f}) = \mu(Z^0, \mathfrak{f}) = A(S, 0),$$

$$\mathfrak{a}(S^*, 0) = \widehat{A(S^*, 0)} \wedge \mathfrak{f} = \widehat{A(S, 0)} \wedge \mathfrak{f} = \mathfrak{a}(S, 0) \geq \mathfrak{u} > \mathfrak{v}.$$

Weiter sei jetzt $0 < \sigma < \tau^*$, und für alle $\rho < \sigma$ sei bereits

$$A(S^*, \rho) \in \mathfrak{v} \textit{ und } \mathfrak{a}(S^*, \rho) \geq \mathfrak{v}$$

gezeigt. Dann gilt auch

$$(*) \qquad \mathfrak{b}_\sigma^* = \bigwedge_{\rho < \sigma} \mathfrak{a}(S^*, \rho) \geq \mathfrak{v}.$$

Es sind jetzt die folgenden beiden Fälle zu unterscheiden.

Fall 1: $Z^{*\sigma} \in S$, *also* $Z^{*\sigma} = Z^\lambda$ *und* $\lambda \leq \sigma$.

Im Unterfall (a) gilt $\mathfrak{A}(Z^\lambda, \mathfrak{b}_\lambda) \neq \emptyset$ und weiter $A(S, \lambda) = \mu(Z^\lambda, \mathfrak{b}_\lambda) \in \mathfrak{u}$, wegen $\mathfrak{u} > \mathfrak{v}$ also erst recht $A(S, \lambda) \in \mathfrak{v}$. Daher und wegen (*) erhält man $\widehat{A(S, \lambda)} \wedge \mathfrak{b}_\sigma^* \neq \mathfrak{o}$, so daß auch bezüglich S^* der Unterfall (a) eintritt. Es folgt

$$A(S^*, \sigma) = A(S, \lambda) = \mu(Z^{*\sigma}, \mathfrak{b}_\sigma^*) \in \mathfrak{v},$$

$$\mathfrak{a}(S^*, \sigma) = \widehat{A(S^*, \sigma)} \wedge \mathfrak{b}_\sigma^* \geq \mathfrak{v}.$$

Im Unterfall (b) gilt $\mathfrak{A}(Z^\lambda, \mathfrak{b}_\lambda) = \emptyset$ und wegen $\mathfrak{b}_\lambda \geq \mathfrak{b}_\sigma^*$ dann erst recht $\mathfrak{A}(Z^{*\sigma}, \mathfrak{b}_\sigma^*) = \emptyset$. Damit liegt auch bezüglich S^* der Unterfall (b) vor, und man erhält

$$A(S^*, \sigma) = \omega \in \mathfrak{v}, \quad \mathfrak{a}(S^*, \sigma) = \widehat{A(S^*, \sigma)} \wedge \mathfrak{b}_\sigma^* = \mathfrak{b}_\sigma^* \geq \mathfrak{v}.$$

Fall 2: $Z^*\sigma \in \overline{S}$, *also* $Z^{*\sigma} = \overline{Z}^\rho$ *und* $\rho \leq \sigma$.

Wie im Fall 1 erhält man im Unterfall (a) bei Berücksichtigung von (*) in der letzten Beziehung

$$A(\overline{S}, \rho) = \mu(\overline{Z}^\rho, \overline{\mathfrak{b}}_\rho) \in \mathfrak{v}, \quad \widehat{A(\overline{S}, \rho)} \wedge \mathfrak{b}_\sigma^* \neq \mathfrak{o},$$

$$A(S^*, \sigma) = A(\overline{S}, \rho) \in \mathfrak{v}, \quad \mathfrak{a}(S^*, \sigma) = \widehat{A(S^*, \sigma)} \wedge \mathfrak{b}_\sigma^* \geq \mathfrak{v}$$

und im Unterfall (b)

$$A(S^*, \sigma) = \omega \in \mathfrak{v}, \quad \mathfrak{a}(S^*, \sigma) = \mathfrak{b}_\sigma^* \geq \mathfrak{v}.$$

Insgesamt folgt jetzt zunächst

$$(**) \quad \Phi(S^*) = \bigwedge_{\sigma < \tau^*} \mathfrak{a}(S^*, \sigma) \geq \mathfrak{v}.$$

Da aber im Fall 2 wegen Satz 2.7 durch die Mengen $A(\overline{S}, \rho) = \mu(\overline{Z}^\rho, \overline{\mathfrak{b}}_\rho) = V_\rho \cup \{0\}$ alle Basismengen von $\mathfrak{v}$ erfaßt werden, gilt auch an der zweiten Position in (**) das Gleichheitszeichen.

Die Zusatzbehauptung ist trivial, weil $\overline{S}$ eine mengeninduzierte Sequenz ist. •

Eine unmittelbare Folge aus 5.1 und 5.2 ist

5.3 Satz. *Es sei* S *eine Zerlegungssequenz.*

Ist $\Phi(S)$ *ein Ultrafilter, so gilt* $\Phi(S^*) = \Phi(S)$ *für jede zulässige Erweiterung* S^* *von* S.

Umgekehrt sei $\Phi(S^*) = \Phi(S)$ *nur für alle zulässigen Erweiterungen* S^* *von* S *durch mengeninduzierte Zerlegungen vorausgesetzt. Dann ist* $\Phi(S)$ *ein Ultrafilter.*

Bei den Sätzen 5.2 und 5.3 liegt die Betonung immer auf „zulässige" Erweiterung.

Es kann $\Phi(S)$ ein Ultrafilter sein, und S kann dennoch Teilsequenz eines $S^* \in \Sigma$ mit $\Phi(S^*) \neq \Phi(S)$ sein. Nur ist dann S^* keine zulässige Erweiterung von S; es gilt vielmehr im Gegenteil $\Phi(S) \wedge \Phi(S^*) = \mathfrak{o}$.

5.4 Definition. Bei gegebenem $\mathfrak{b} \in \mathbf{F}$ soll $Z^* \in \Sigma$ dann $\mathfrak{b}$-*verträglich* genannt werden, wenn entweder $\mathfrak{A}(Z^*, \mathfrak{b}) \neq \emptyset$ und $\mu(Z^*, \mathfrak{b}) \in \mathfrak{b}$ gilt oder wenn $\bigcup_{\iota<\lambda} Z_\iota^* \in \mathfrak{b}$ mit einem $\lambda < \omega$ erfüllt ist.

Die in dieser Definition geforderte Fallunterscheidung folgt nicht etwa wegen Satz 2.5, weil nicht vorausgesetzt ist, daß $\mathfrak{b}$ eine Filterbasis der Mächtigkeit ω besitzt.

5.5 Satz. *Es sei* $\mathfrak{b} \in \mathbf{F}$. *Eine Zerlegung* Z^* *ist genau dann* $\mathfrak{b}$-*verträglich, wenn es zu jeder Zerlegungssequenz* $S = (Z^\nu)_{\nu<\tau}$ *mit* $\Phi(S) = \mathfrak{b}$ *einen Index* $\rho(S) < \tau$ *mit folgender Eigenschaft gibt: Für jede Sequenz* $S' \in \Sigma$, *die aus* S *durch Einfügung von* Z^* *nach* Z^ν *mit* $\nu > \rho(S)$ *entsteht, gilt ebenfalls* $\Phi(S') = \mathfrak{b}$.

Beweis: Im ersten Beweisteil wird vorausgesetzt, daß S^* eine $\mathfrak{b}$-verträgliche Zerlegung ist. Ferner sei $S \in \Sigma$ mit $\Phi(S) = \mathfrak{b}$ gegeben. Dann tritt nach Definition 5.4 genau einer der beiden folgenden Fälle ein.

Fall 1: $\mathfrak{A}(Z^*, \mathfrak{b}) \neq \emptyset$ *und* $\mu(Z^*, \mathfrak{b}) \in \mathfrak{b}$.

Bei der Berechnung von $\Phi(S)$ gibt es dann einen ersten Index $\rho(S) < \tau$ mit $A^* = \mu(Z^*, \mathfrak{b}) \in \mathfrak{a}(S, \rho(S))$, also auch mit $A^* \in \mathfrak{a}(S, \nu)$ für alle $\nu > \rho(S)$. Es folgt $A^* = \mu(Z^*, \mathfrak{a}(S, \nu))$. Ordnet man daher Z^* in S unmittelbar nach Z^ν ein, so liefert der nächste Schritt für die jetzt entstandene Sequenz S'

$$\mathfrak{a}(S', \nu + 1) = \widehat{A}^* \wedge \mathfrak{a}(S, \nu) = \mathfrak{a}(S, \nu),$$

so daß die Einfügung von Z^* keine Änderung bewirkt und auch $\Phi(S') = \mathfrak{b}$ gilt.

Fall 2: $\bigcup_{\iota<\lambda} Z_\iota^* \in \mathfrak{b}$ *für ein* $\lambda < \omega$.

Auch hier gibt es einen ersten Index $\rho(S)$ mit $\bigcup_{\iota<\lambda} Z_\iota^* \in \mathfrak{a}(S, \rho(S))$, also auch mit $\bigcup_{\iota<\lambda} Z_\iota^* \in \mathfrak{a}(S, \nu)$ für alle $\nu > \rho(S)$. Bei der Einordnung von Z^* unmittelbar nach Z^ν erhält man für die jetzt entstandene Sequenz S' daher wieder $\mathfrak{a}(S', \nu + 1) = \mathfrak{a}(S, \nu)$, da ja nun der Fall (b) bei der Konstruktion keine Änderung hervorruft. Wieder folgt $\Phi(S') = \mathfrak{b}$.

Im zweiten Teil des Beweises wird vorausgesetzt, daß sich Z^* in jede Sequenz $S \in \Sigma$ mit $\Phi(S) = \mathfrak{b}$ von einem Index $\rho(S)$ an einordnen läßt, so daß für die entstehende erweiterte Sequenz S' wieder $\Phi(S') = \mathfrak{b}$ erfüllt ist.

Es sei jetzt Z^* in S unmittelbar nach Z^ν mit $\nu > \rho(S)$ eingefügt. Dann gilt $\mathfrak{b}_{\nu+1} = \mathfrak{a}(S, \nu) \geq \mathfrak{b}$. Ist nun $\mathfrak{A}(Z^*, \mathfrak{b}_{\nu+1}) \neq \emptyset$, so folgt $\mathfrak{a}(S', \nu + 1) = \mu(Z^*, \mathfrak{a}(S, \nu)) \wedge \mathfrak{a}(S, \nu) \geq \mathfrak{b}$, also $\mathfrak{A}(Z^*, \mathfrak{b}) \neq \emptyset$ und $\mu(Z^*, \mathfrak{b}) \in \mathfrak{b}$. Im anderen Fall ergibt sich unmittelbar $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}(S, \nu) \leq \widehat{\bigcup_{\iota<\lambda} Z_\iota^*}$ mit einem $\lambda < \omega$ und damit $\bigcup_{\iota<\lambda} Z_\iota^* \in \mathfrak{b}$. Daher ist Z^* jetzt $\mathfrak{b}$-verträglich. •

Mit einem Sonderfall hinsichtlich der Möglichkeit zulässiger Erweiterungen hatte man es im Zusammenhang mit einfachen Ultrafiltern in Satz 4.1 zu tun, nämlich mit Sequenzen S, die keiner echten Erweiterung fähig waren, weil schon alle möglichen Zerlegungen in S auftraten. Diese besondere Situation soll in dem folgenden Satz noch einmal aufgegriffen werden.

5.6 Satz. *Es sei* $S \in \Sigma$. *Genau dann ist* $\Phi(S)$ *ein einfacher Ultrafilter, wenn* S *eine zulässige Erweiterung* S^* *mit* $\Phi(S^*) = \Phi(S)$ *besitzt, die alle Zerlegungen von* ω *enthält.*

B e w e i s: Wenn eine solche zulässige Erweiterung S^* existiert, muß $\Phi(S) = \Phi(S^*)$ nach Satz 4.1 ein einfacher Ultrafilter sein.

Umgekehrt sei jetzt $\mathfrak{u} = \Phi(S)$ ein einfacher Ultrafilter. Es muß dann $\tau(S) = \omega'$ gelten, so daß $S = (Z^\nu)_{\nu < \omega'}$ gilt. Weiter sei $(Z'^\kappa)_{\kappa < \beta}$ mit $\beta \leq \omega'$ die Menge aller in S noch nicht aufgetretenen Zerlegungen in einer beliebigen aber fest gewählten Reihenfolge.

Zunächst sei jetzt $\kappa < \beta$ fest, und es sei $Z'^\kappa = \{Z_\iota'^\kappa : \iota < \omega\}$. Da $\mathfrak{u}$ nach Voraussetzung ein einfacher Ultrafilter ist, gibt es ein $U \in \mathfrak{u}$ mit entweder $|U \cap Z_\iota'^\kappa| = 1$ für alle $\iota < \omega$, also mit $\mathfrak{A}(Z'^\kappa, \mathfrak{u}) \neq \emptyset$ und mit $\mu(Z'^\kappa, \mathfrak{u}) \in \mathfrak{u}$, oder aber mit $U \subseteq \bigcup_{\iota < \lambda} Z_\iota'^\kappa$ für ein $\lambda < \omega$, also mit $\bigcup_{\iota < \lambda} Z_\iota'^\kappa \in \mathfrak{u}$. Daher ist Z'^κ eine $\mathfrak{u}$-verträgliche Zerlegung. Nach Satz 5.5 gibt es somit einen Index $\rho_\kappa(S)$ mit der Eigenschaft, daß man Z'^κ in S an einer Stelle nach $\rho_\kappa(S)$ in S einfügen kann, ohne daß dadurch der Wert von Φ geändert wird.

Da dies für alle $\kappa < \beta$ gilt, folgt die Existenz einer streng isotonen Abbildung $\varphi: \beta \to \omega'$ mit folgender Eigenschaft: Fügt man für alle $\kappa < \beta$ die Zerlegung Z'^κ in S unmittelbar nach $Z^{\varphi(\kappa)}$ ein, so erhält man insgesamt eine Zerlegungssequenz S^*, die alle Zerlegungen von ω enthält und für die ebenfalls $\Phi(S^*) = \mathfrak{u}$ gilt. •

Es bleibt die Frage, ob bei Beschränkung auf mengeninduzierte Zerlegungssequenzen ein 5.6 entsprechender Satz gilt. Dies soll im nächsten Satz positiv beantwortet werden.

5.7 Satz. *Es sei* $S \in \Sigma_m$ *eine mengeninduzierte Zerlegungssequenz. Genau dann ist* $\Phi(S)$ *ein einfacher Ultrafilter, wenn* S *eine zulässige Erweiterung* S' *mit* $\Phi(S') = \Phi(S)$ *besitzt, die aus allen mengeninduzierten Zerlegungen besteht.*

B e w e i s: Wenn $\Phi(S)$ ein einfacher Ultrafilter ist, besitzt S nach Satz 5.6 eine zulässige Erweiterung S^* mit $\Phi(S^*) = \Phi(S)$, die aus allen Zerlegungen von ω besteht. Es ist dann S' die Teilsequenz aller mengeninduzierten Zerlegungen aus S^*.

Umgekehrt gelte $\Phi(S) = \Phi(S')$, wobei die zulässige Erweiterung S' alle mengeninduzierten Zerlegungen enthält. Wieder wegen Satz 5.6 genügt nun der Nachweis, daß S' seinerseits eine zulässige Erweiterung S^* mit $\Phi(S^*) = \Phi(S')$ besitzt, die sogar aus allen Zerlegungen von ω besteht. Dazu aber muß nur gezeigt werden, daß sich jede nicht in S' enthaltene Zerlegung $Z = \{Z_\iota : \iota < \omega\}$ so in S' einordnen läßt, daß hierdurch der Φ-Wert nicht verändert wird.

Wenn es einen Index σ gibt, bei dem hinsichtlich S' und für die gegebene Zerlegung $\mathfrak{A}(Z, \mathfrak{b}_\sigma') = \emptyset$ gilt, wenn also bezüglich S' der Fall (b) eintritt, dann genügt es, Z nach

Z'^{σ} einzuordnen. Andernfalls sei σ beliebig, aber fest gewählt. Wegen $\mathfrak{A}(Z, \mathfrak{b}'_{\sigma}) \neq \emptyset$ bestimmt dann $M = \mu(Z, \mathfrak{b}'_{\sigma}) \cup \{0\}$ die induzierte Zerlegung $Z(M)$ (vgl. 2.5) mit $\mu(Z(M), \mathfrak{b}'_{\sigma}) \cup \{0\} = \mu(Z, \mathfrak{b}'_{\sigma}) \cup \{0\}$. Nach Voraussetzung tritt aber $Z(M)$ als mengeninduzierte Zerlegung in S' auf; es sei etwa $Z(M) = Z'^{\tau}$. Mit $\tau^* = \max\{\sigma, \tau\}$ kann man dann Z nach Z'^{τ^*} einordnen.

6. Schlußbemerkungen

Bei der Definition der Abbildung Φ kamen zwei zusätzliche Voraussetzungen ins Spiel, die nicht durch die eigentliche Fragestellung bedingt waren. Einmal war es die Wahl der Grundmenge als Kardinalzahl, wodurch in ihr die zusätzliche Struktur der natürlichen Wohlordnung der Ordinalzahlen zur Verfügung stand. Diese aufgeprägte Ordnungsstruktur ist jedoch unwesentlich: Jede andere Wohlordnung geht aus ihr durch eine Bijektion hervor, durch die dann auch Φ in natürlicher Weise transformiert wird. Einschneidender war hingegen die willkürliche Wahl einer Wohlordnung der Potenzmenge der Grundmenge. Die vorangehenden Überlegungen haben jedoch gezeigt, daß man sich nachträglich auch von dieser Willkür befreien kann, indem man sich wesentlich auf mengeninduzierte Zerlegungen stützt. Mit den Bezeichnungen aus dem dritten Abschitt kann man zum Beispiel bei der Definition von Φ die Filter $\mathfrak{a}(S, \sigma)$ abweichend durch

$$\mathfrak{a}(S, \sigma) = \begin{cases} \mu(Z^{\sigma}) \wedge \mathfrak{b}_{\sigma} & \text{falls } \mu(Z^{\sigma}) \wedge \mathfrak{b}_{\sigma} \neq \mathfrak{o} \\ \mathfrak{b}_{\sigma} & \text{sonst} \end{cases}$$

erklären, wobei dann nur mengeninduzierte Zerlegungen Änderungen bewirken, die Eigenschaften von Φ aber erhalten bleiben.

Die Erzeugung von Filtern mit Zerlegungssequenzen kann speziell bei Ultrafiltern auch einen neuen Zugang zu einer Stufenfunktion vermitteln, worauf in einer späteren Arbeit eingegangen werden soll.